



Политропные процессы

В термодинамике изучаются процессы, подчиненные определенной закономерности. Так изобарный процесс осуществляется при постоянном давлении, изохорный – при постоянном объеме и т.д. Наряду с этими процессами можно представить еще бесконечное множество процессов, у которых имеются другие постоянные признаки. За условие протекания процессов, называемых **политропными** (в переводе с греческого – многообразными), принимают постоянство распределения подводимой теплоты между внутренней энергией и работой газа в течение всего процесса. В дальнейшем будем рассматривать процессы для 1 кг идеального газа.

Пусть φ – доля подведенной теплоты, расходуемая на изменение внутренней энергии:

$$\varphi = \frac{du}{dq}. \quad (1)$$

При этом для соблюдения интегрального баланса распределения теплоты необходимо, чтобы в пределах процесса теплоемкость c_v была величиной постоянной (а также и c_p – в соответствии с уравнением Майера $c_p - c_v = R$).

Количество теплоты в политропном процессе:

$$dq = c_\varphi dT, \quad (2)$$

где c_φ – теплоемкость политропного процесса. Тогда

$$\begin{aligned} du &= c_v dT = \varphi c_\varphi dT, \\ c_\varphi &= \frac{c_v}{\varphi}. \end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом, политропный процесс можно определить как процесс при постоянной теплоемкости c_φ или процесс при постоянном значении φ . Исследования показывают, что величины φ и c_φ в различных процессах могут изменяться в пределах от $+\infty$ до $-\infty$.

Связь между параметрами газа в политропном процессе

Уравнения связи между параметрами газа в политропном процессе можно получить из уравнений первого закона термодинамики:

$$\begin{cases} c_\varphi dT = c_p dT - v dp \\ c_\varphi dT = c_v dT + p dv \end{cases} = \begin{cases} (c_\varphi - c_p) dT = -v dp \\ (c_\varphi - c_v) dT = p dv \end{cases}. \quad (4)$$

Поделив почленно уравнения, получим:



$$\frac{c_\varphi - c_p}{c_\varphi - c_v} = - \frac{v dp}{p dv}. \quad (5)$$

Левая часть уравнения (5) является величиной постоянной и называется *показателем политропы*:

$$n = \frac{c_\varphi - c_p}{c_\varphi - c_v}. \quad (6)$$

В зависимости от величины c_φ показатель политропы в различных процессах может изменяться в пределах от $+\infty$ до $-\infty$.

Интегрируя уравнение (5) в пределах процесса от начальной точки 1 до конечной точки 2

$$\int_1^2 \frac{n dv}{v} = - \int_1^2 \frac{dp}{p}, \quad n \cdot \ln \frac{v_2}{v_1} = - \ln \frac{p_2}{p_1} = \ln \frac{p_1}{p_2}$$

и потенцируя, получаем:

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^n \quad \text{или} \quad p_1 v_1^n = p_2 v_2^n. \quad (7)$$

Равенство (7) выполняется не только для граничных точек, но и для всех промежуточных точек процесса, т.е. в общем случае можно написать:

$$p v^n = \text{const}. \quad (8)$$

Уравнение (8) отражает связь между параметрами p и v на линии процесса и называется *уравнением политропного процесса* или *уравнением политропы*. Связь между другими параметрами можно получить с использованием уравнения состояния:

$$p v = R T. \quad (9)$$

Заменяя параметры p и v в уравнении (8) с использованием уравнения (9), получаем:

$$T v^{n-1} = \text{const}; \quad (10)$$

$$T p^{\frac{1-n}{n}} = \text{const}. \quad (11)$$

Показатель политропы при известных параметрах рабочего тела в начале и конце процесса может быть определен из уравнений (8) или (10-11). Так, например, используя уравнение (8), можно получить:



$$n = \frac{\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)}{\ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)}. \quad (12)$$

Зная показатель политропы, можно найти теплоемкость политропного процесса. Выражая из уравнения (6) c_φ , а также учитывая (3), получаем:

$$c_\varphi = \frac{c_p - n \cdot c_v}{(1-n)} = c_v \frac{\left(\frac{c_p}{c_v} - n\right)}{(1-n)} = c_v \frac{(k-n)}{(1-n)} = \frac{c_v}{\varphi}. \quad (13)$$

Тогда зависимость между показателем политропы n и величиной φ , характеризующей распределение теплоты между внутренней энергией газа и его работой, выглядит следующим образом:

$$\varphi = \frac{1-n}{k-n}. \quad (14)$$

Энергетические характеристики политропных процессов

Удельная работа в политропном процессе определяется по общему интегралу работы:

$$l_{12} = \int_1^2 p dv. \quad (15)$$

С учетом связи между параметрами на линии политропного процесса $p_1 v_1^n = \dots = p v^n = \dots = p_2 v_2^n$ зависимость давления от объема можно выразить в виде:

$$p = \frac{p_1 v_1^n}{v^n}. \quad (16)$$

Подставляя (16) в (15), находим значение интеграла работы:

$$l_{12} = \int_1^2 \frac{p_1 v_1^n}{v^n} dv = p_1 v_1^n \int_1^2 \frac{dv}{v^n} = \frac{p_1 v_1^n}{1-n} v^{1-n} \Big|_1^2 = \frac{p_1 v_1^n (v_2^{1-n} - v_1^{1-n})}{1-n}. \quad (17)$$

Так как

$$p_1 v_1^n = p_2 v_2^n,$$

то

$$l_{12} = \frac{p_1 v_1^n (v_2^{1-n} - v_1^{1-n})}{1-n} = \frac{p_2 v_2^n v_2^{1-n} - p_1 v_1^n v_1^{1-n}}{1-n} = \frac{p_2 v_2 - p_1 v_1}{1-n}. \quad (18)$$



Используя уравнение состояния идеального газа (9), а также формулы (8,10-11), можно получить другие выражения для работы в политропном процессе:

$$l_{12} = \frac{RT_2 - RT_1}{1-n} = \frac{R}{1-n}(T_2 - T_1) = \frac{RT_1}{n-1} \cdot \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right); \quad (19)$$

$$l_{12} = \frac{RT_1}{n-1} \left[1 - \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{n-1} \right] = \frac{RT_1}{n-1} \cdot \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right]. \quad (20)$$

Элементарная удельная работа расширения-сжатия определяется выражением $dl = pdv$, а располагаемая (техническая, полезная) работа равна $dl' = -vdp$. Тогда в соответствии с формулами (5) и (6) можно записать:

$$n = -\frac{vdp}{pdv} = \frac{dl'}{dl} \quad \text{или} \quad l'_{12} = n \cdot l_{12}. \quad (21)$$

Таким образом, располагаемую работу в политропном процессе можно определить по формулам (18 – 20), умножая полученный результат на величину показателя политропы n .

Изменение удельной внутренней энергии и энтальпии газа в политропных процессах определяются по общим формулам:

$$\Delta u_{12} = u_2 - u_1 = c_v(T_2 - T_1);$$

$$\Delta i_{12} = i_2 - i_1 = c_p(T_2 - T_1).$$

Удельная теплота политропного процесса зависит от его теплоемкости c_ϕ и определяется по общей формуле

$$q_{12} = c_\phi \Delta T_{12},$$

или с учетом (13)

$$q_{12} = c_v \frac{k-n}{1-n} (T_2 - T_1). \quad (22)$$

Изопроцессы в идеальных газах

При исследовании политропных процессов практический интерес представляют частные случаи – термодинамические процессы, имеющие определенные признаки:

- изохорный процесс – $v = \text{const}$;
- изобарный процесс – $p = \text{const}$;
- изотермический процесс – $T = \text{const}$;



- адиабатный процесс – $dq = 0$ (отсутствует теплообмен с окружающей средой).

Изохорный процесс

Изохорный процесс протекает при условии $v = const$. Для определения показателя политропы процесса уравнение политропы (8) можно представить в виде

$$p^{\frac{1}{n}} v = const, \quad (23)$$

откуда следует, что изохорный процесс $v = const$ может быть реализован при значениях показателя политропы $n = \pm\infty$.

Связь между параметрами газа в изохорном процессе находим из уравнения состояния (9):

$$\frac{p}{T} = \frac{R}{v} = const \quad \text{или} \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}, \quad (24)$$

т.е. в изохорном процессе давление газа пропорционально абсолютной температуре (закон Шарля).

Изохорный процесс изображается вертикальной линией (*изохорой*) на рабочей диаграмме (рис.1). Здесь 1–2 – изохорный нагрев (изохорное повышение давления), 1–2' – изохорное охлаждение (изохорное понижение давления).

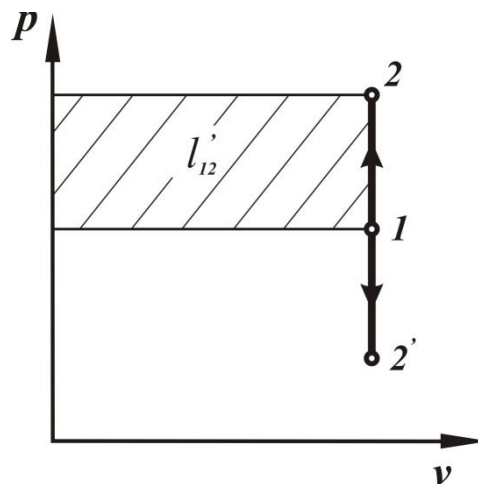


Рис. 1.

Удельная работа расширения-сжатия в процессе равна нулю:

$$l_{12} = \int_1^2 p dv = 0,$$

располагаемая работа (на диаграмме заштрихована):



$$l'_{12} = -\int_1^2 v dp = -v(p_2 - p_1). \quad (25)$$

Поскольку работа расширения-сжатия в процессе равна нулю, то из первого закона термодинамики следует:

$$q_{12} = \Delta u_{12} = c_v(T_2 - T_1). \quad (26)$$

Таким образом, подведенная к газу в изохорном процессе теплота полностью расходуется на увеличение его внутренней энергии, теплоемкость процесса $c_\varphi = c_v$, а коэффициент распределения теплоты $\varphi = \frac{\Delta u}{q} = 1$.

Изобарный процесс

Изобарный процесс протекает при условии $p = const$. Из уравнения политропы (8) $pv^n = const$ следует, что изобарный процесс может быть реализован при значении показателя политропы $n = 0$.

Связь между параметрами газа в изобарном процессе, как и в предыдущем случае, находим из уравнения состояния (9):

$$\frac{v}{T} = \frac{R}{p} = const \quad или \quad \frac{v_2}{v_1} = \frac{T_2}{T_1}, \quad (27)$$

т.е. в изобарном процессе объем газа пропорционален его абсолютной температуре (закон Гей-Люссака).

Изобарный процесс изображается горизонтальной линией (*изобарой*) на рабочей диаграмме (рис.2). Здесь 1–2 – изобарный нагрев (изобарное расширение), 1–2' – изобарное охлаждение (изобарное сжатие).

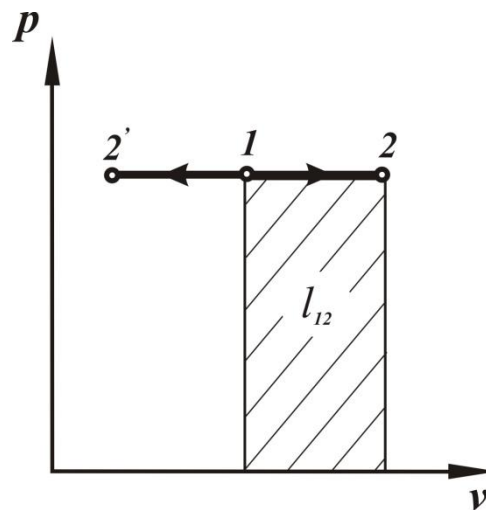


Рис. 2.

Удельная работа расширения-сжатия в процессе (на диаграмме заштрихована) равна:



$$l_{12} = \int_1^2 p dv = p (v_2 - v_1), \quad (28)$$

а располагаемая работа равна нулю:

$$l'_{12} = -\int_1^2 v dp = 0.$$

Дифференцируя уравнение состояния $p v = R T$:

$$p dv + v dp = R dT,$$

и имея в виду, что для изобарного процесса второе слагаемое в левой части уравнения равно нулю, получаем:

$$p dv = R dT \quad \text{или} \quad R = \frac{p dv}{dT} = \frac{dl}{dT} \left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг K}} \right]. \quad (29)$$

Из анализа последнего выражения следует физический смысл удельной газовой постоянной: газовая постоянная характеризует работоспособность газа и численно равна работе расширения-сжатия 1 кг газа в изобарном процессе при изменении температуры на 1 К.

Из формулы (13) следует, что при $n = 0$ теплоемкость изобарного процесса равна $c_\varphi = c_p$. Поскольку располагаемая работа в процессе равна нулю, то из первого закона термодинамики следует:

$$q_{12} = \Delta i_{12} = c_p (T_2 - T_1). \quad (30)$$

Таким образом, подведенная к газу в изобарном процессе теплота полностью расходуется на увеличение его энтальпии.

Записывая первый закон термодинамики в другой форме, получаем:

$$c_p dT = c_v dT + R dT \quad \text{или} \quad c_p = c_v + R. \quad (31)$$

Последнее выражение представляет собой связь между изобарной c_p и изохорной c_v теплоемкостями идеального газа (уравнение Майера).

В соответствии с формулой (14) при $n = 0$ коэффициент распределения теплоты φ равен $\frac{1}{k}$.

Изотермический процесс

Изотермический процесс протекает при условии $T = \text{const}$. Из уравнения политропы (10) $T v^{n-1} = \text{const}$ следует, что изотермический процесс может быть реализован при значении показателя политропы $n = 1$.

Связь между параметрами газа в изотермическом процессе, как и в предыдущем случае, находим из уравнения состояния (9):

$$p v = R T = \text{const} \quad \text{или} \quad p_1 v_1 = p_2 v_2. \quad (32)$$



т.е. в этом процессе объем газа изменяется обратно пропорционально давлению (закон Бойля - Мариотта).

Уравнение кривой процесса – изотермы на рабочей диаграмме $p = \frac{RT}{v}$ представляет собой равнобокую гиперболу, для которой оси координат являются асимптотами (рис.3). Здесь 1–2 – изотермическое расширение, 1–2' – изотермическое сжатие. При более высокой температуре процесса кривая смещается вправо и вверх ($T+dT$), при уменьшении температуры – влево и вниз ($T-dT$).

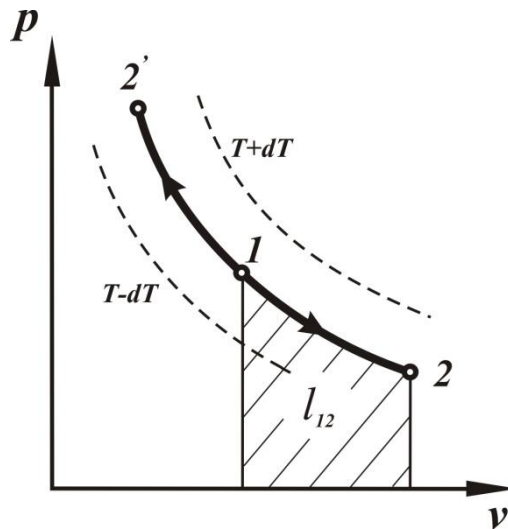


Рис. 3.

Удельная работа изотермического процесса не может быть определена по уравнениям для политропного процесса (17 – 20) и определяется из уравнения (на диаграмме заштрихована):

$$l_{12} = \int_1^2 p dv = \int_1^2 \frac{RT}{v} dv = RT \ln \frac{v_2}{v_1} = RT \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (33)$$

Показатель политропы процесса $n = 1$, поэтому располагаемая работа $l'_{12} = n \cdot l_{12}$ равна работе расширения-сжатия.

Теплоемкость процесса

$$c_\phi = c_v \frac{k - n}{1 - n} = \pm \infty, \quad (34)$$

поэтому количество теплоты в процессе по общей формуле $dq = c_\phi dT$ определить невозможно. Так как температура в процессе не изменяется, то изменение внутренней энергии и энтальпии $\Delta u_{12} = \Delta i_{12} = 0$, и количество теплоты согласно первому закону термодинамики равно работе расширения-сжатия или располагаемой работе:

$$q_{12} = l_{12} = l'_{12}. \quad (35)$$



В соответствии с формулой (14) при $n = 1$ коэффициент распределения теплоты φ равен 0.

Адиабатный процесс

Адиабатный процесс протекает без теплообмена с окружающей средой, т.е. без подвода и отвода теплоты ($dq = 0$), поэтому теплоемкость процесса $c_\varphi = 0$. Из уравнения (6) следует, что в адиабатном процессе показатель политропы равен:

$$n = \frac{c_\varphi - c_p}{c_\varphi - c_v} = \frac{c_p}{c_v} = k. \quad (36)$$

Формулы связи между параметрами состояния в адиабатном процессе (37) и формулы работы (38) соответствуют общим формулам для политропного процесса при условии $n = k$:

$$\begin{aligned} pv^k &= \text{const}, \\ Tv^{k-1} &= \text{const}, \\ p T^{\frac{k}{1-k}} &= \text{const}, \\ T p^{\frac{1-k}{k}} &= \text{const}. \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} l_{12} &= \frac{p_2 v_2 - p_1 v_1}{1-k} = \frac{R}{1-k} (T_2 - T_1) = \frac{RT_1}{k-1} \cdot \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right); \\ l_{12} &= \frac{RT_1}{k-1} \left[1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{k-1}\right] = \frac{RT_1}{k-1} \cdot \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]. \end{aligned} \quad (38)$$

Уравнение кривой адиабатного процесса на рабочей диаграмме $p = \frac{p_1 v_1^k}{v^k}$ представляет собой неравнобокую гиперболу, для которой оси координат являются асимптотами (рис.4). Так как величина показателя адиабаты больше единицы, то адиабата в координатах $v - p$ круче изотермы, как это показано на рис.4. Здесь 1–2 – адиабатное расширение, 1–2' – адиабатное сжатие.

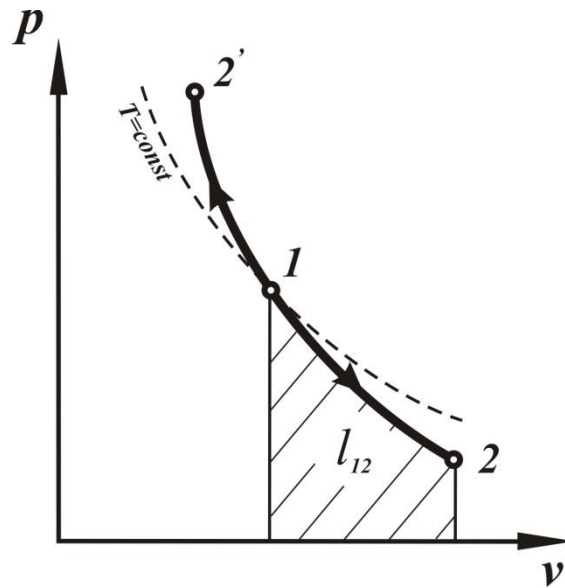


Рис. 4.

Первый закон термодинамики для адиабатного процесса запишется в форме:

$$dl = -du \quad \text{или} \quad pdv = -c_v dT, \quad (39)$$

т.е. работа расширения l_{12} совершается за счет убыли внутренней энергии газа. При этом в процессах расширения температура газа уменьшается, а в процессах сжатия – увеличивается.

**Анализ политропных процессов.****Обобщенная рабочая диаграмма политропных процессов.**

Уравнение для теплоемкости политропного процесса

$$c_{\varphi} = c_v \frac{k - n}{1 - n} \quad (40)$$

позволяет определить удельную теплоемкость для любого процесса в зависимости от значения показателя политропы n . Считая рассмотренные изопроцессы частными случаями политропного процесса, результаты соответствия c_{φ} и n для них можно свести в таблицу:

Процесс	c_{φ}	n
$T = \text{const}$	$\pm \infty$	1
$p = \text{const}$	c_p	0
$v = \text{const}$	c_v	$\pm \infty$
$q = \text{const}$	0	k

В соответствии с информацией, приведенной в таблице, графическая интерпретация зависимости (40) представляется в виде рис. 5.

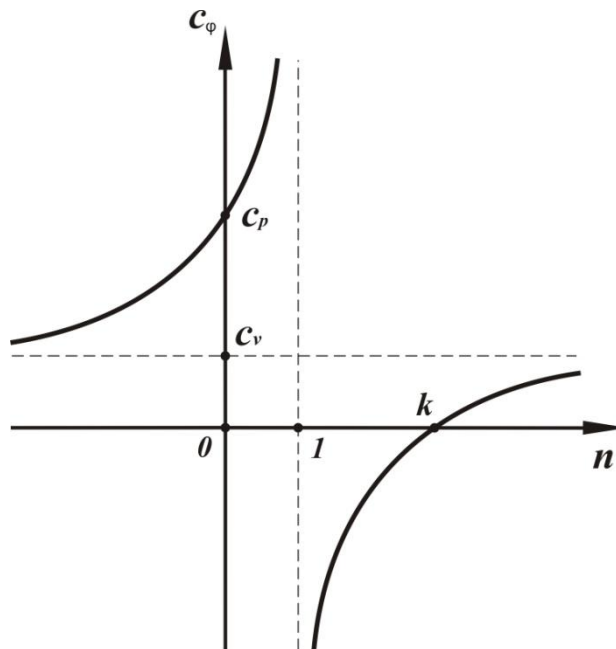


Рис. 5

Из рисунка видно в частности, что в диапазоне показателей политропы $1 < n < k$ теплоемкость процессов будет отрицательной, т.е. при подводе теплоты температура газа уменьшается, а с отводом теплоты — увеличивается. Смысл отрицательной теплоемкости можно объяснить



следующим образом: работа, совершаемая газом при расширении, больше, чем подведено теплоты ($l > q$), при этом согласно первому закону термодинамики $q = \Delta u + l$ часть работы совершается за счет убыли внутренней энергии газа, и температура газа понижается. Если же происходит процесс сжатия, то теплота, отведенная от газа, меньше работы сжатия, и часть работы затрачивается на увеличение внутренней энергии газа, что приводит к росту его температуры.

Для анализа политропных процессов удобно пользоваться обобщенной рабочей диаграммой, на которой изображены рассмотренные выше изопроцессы с соответствующими показателями политропы (рис. 6). Любой политропный процесс, выходящий из одной и той же точки (точки пересечения линий изопроцессов), будет располагаться в одном из пронумерованных секторов, в пределах которых знаки изменения параметров и слагаемых первого закона термодинамики будут одинаковыми.

Диаграмма позволяет проанализировать любой политропный процесс и определить условия, при которых этот процесс может быть реализован, то есть, как распределяется теплота между внутренней энергией и работой, что будет с температурой системы и т.д. В частности, любой процесс, лежащий выше и правее изотермы, сопровождается ростом температуры, внутренней энергии и энтальпии; процесс, лежащий правее изохоры, сопровождается увеличением объема и работа процесса положительна. Аналогично, все процессы, проходящие выше и правее адиабаты, сопровождаются подводом теплоты.

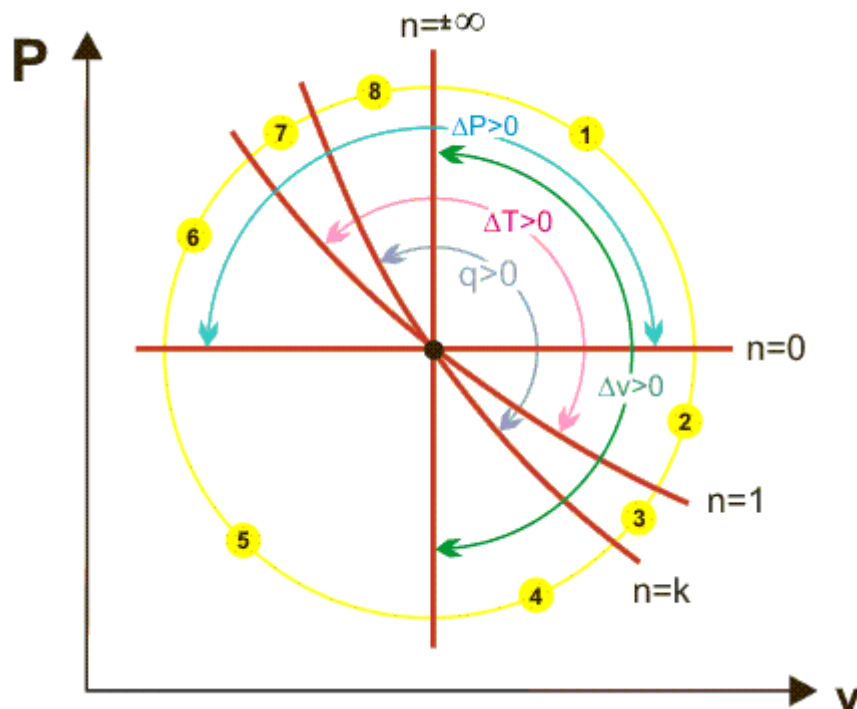


Рис. 6. Обобщенная рабочая диаграмма политропных процессов

**Пример 1:**

Выделить на обобщенной рабочей диаграмме сектор, в котором все процессы расширения происходят с отводом теплоты. Определить условия, при которых такой процесс может быть реализован: знаки изменения основных термических параметров и энергетических функций. Указать также диапазоны изменения теплоемкости и показателя политропы для таких процессов.

Решение

В соответствии с условиями задачи политропные процессы расширения с отводом теплоты будут располагаться правее изохоры и левее и ниже адиабаты (сектор 4 на рис.6). Для рассматриваемых процессов диапазон изменения теплоемкостей лежит в пределах (рис.5) $0 < c_\varphi < c_v$, а показатель политропы изменяется в пределах $k < n < +\infty$. Такой процесс 1–2 изображен на рис.7 с указанием габаритных процессов сектора.

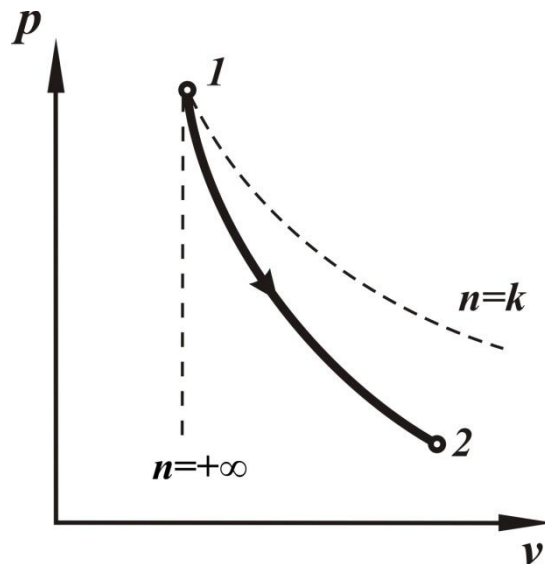


Рис. 7

Термодинамический анализ процесса показывает (рис.6):

$$\begin{aligned}\Delta p &< 0, \\ \Delta v &> 0, \\ \Delta T &< 0, \\ \Delta u &< 0, \\ \Delta i &< 0, \\ l &> 0, \\ q &< 0.\end{aligned}$$

В рассматриваемых процессах работа расширения совершается в условиях отвода теплоты и уменьшения внутренней энергии газа.

Пример 2:

Сделать термодинамический анализ процесса, показанного на рис.8. Указать диапазоны изменения теплоемкости и показателя политропы, знаки изменения основных термических параметров и энергетических функций для этого процесса, а также дать словесную формулировку распределения энергии между теплотой, внутренней энергией и работой.

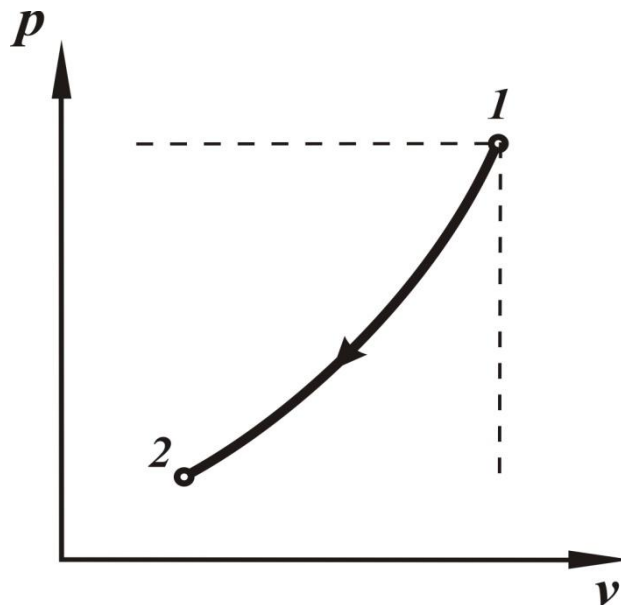


Рис. 8

Решение

В соответствии с условиями задачи политропный процесс, изображенный на рис.8, является процессом сжатия и располагается в секторе 5 обобщенной диаграммы (рис.6). Для таких процессов диапазон изменения теплоемкостей лежит в пределах (рис.5) $c_v < c_\varphi < c_p$, а показатель политропы изменяется в пределах $-\infty < n < 0$.

Термодинамический анализ процесса показывает (рис.6):

$$\begin{aligned}\Delta p &< 0, \\ \Delta v &< 0, \\ \Delta T &< 0, \\ \Delta u &< 0, \\ \Delta i &< 0, \\ l &< 0, \\ q &< 0.\end{aligned}$$

- 1) Отводимая теплота по модулю превышает работу сжатия, поэтому температура газа уменьшается.
- 2) Отвод теплоты настолько большой, что, несмотря на сжатие газа, его температура и давление уменьшаются.